Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/1/080 (S: Varianten)
Lineare Gleichungen, erste Schritte (2)

Index: lineares Gleichungssystem, Zeilenstufenform, Lösungsmenge eines Gleichungssystems

Stoffeinheiten: 2/1/3 - 2/1/6 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

Lösen Sie über dem Grundkörper der reellen Zahlen das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 4x_3 + 4x_4 &= -5 \\ -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= 7 \\ -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Lösung. Da der Koeffizient von x_1 in der ersten Gleichung verschwindet, wird diese zunächst mit der zweiten vertauscht, was auf die Lösungsmenge keinen Einfluss hat.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1 \\ -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= 7 \\ -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Nun können Vielfache der ersten Gleichung von den folgenden subtrahiert werden, so dass in diesen die Koeffizienten vor x_1 verschwinden.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1 \\ -4x_2 + 8x_3 + 7x_4 &= -8 \\ 3x_2 + 18x_3 + 24x_4 &= -18 \end{aligned}$$

Entsprechend wird das aus der zweiten bis vierten Gleichung bestehende Teilsystem umgeformt:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 4x_3 - 5x_4 &= -4 \\ 21x_3 + 33x_4 &= -21 \end{aligned}$$

Da wir ungern mit Brüchen rechnen, werden die 3. und 4. Gleichung mit 21 bzw. 4 multipliziert. Das so entstehende System

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 84x_3 - 105x_4 &= -84 \\ 84x_3 + 132x_4 &= -84 \end{aligned}$$

wird durch Subtraktion der dritten Gleichung von der vierten in ein System in Stufenform überführt.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 84x_3 - 105x_4 &= -84 \\ 237x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten zunächst aus der letzten Gleichung $x_4 = 0$; entsprechend ergeben sich die übrigen x_i durch Einsetzen in die vorhergehenden, also

$$x_3 = \frac{1}{84} \cdot (-84 - (-105x_4)) = \frac{1}{84} \cdot (-84 - 0) = -1 \ \text{ usw.}$$

Die Lösungsmenge des Systems ist

$$\{(-1, 0, -1, 0)\}.$$

Anmerkung. Das hier verwendete Verfahren ist eine Variante des gaußschen Algorithmus, bei der durch Multiplikation mit geeigneten von 0 verschiedenen ganzen Zahlen vermieden wurde, dass Brüche als Koeffizienten auftreten.

Der Fall, dass ein Gleichungssystem mit quadratischer reeller Koeffizientenmatrix genau eine Lösung hat, kann als „allgemein“ angesehen werden, da er für „fast beliebige“ Koeffizienten auftritt. Sonst kann die Lösungsmenge leer oder unendlich sein.