Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/2/030 (S: Varianten)
Lineare Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten (1)

Index: lineares Gleichungssystem, lineares Gleichungssystem in Stufenform, Zeilenstufenform, Stufenindizes

Stoffeinheiten: 2/1/3 - 2/1/6 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

Lösen Sie das folgende (bereits in Zeilenstufenform vorliegende) Gleichungssystem über $\mathbb{C}$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, so dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} 2ix_1 - (i-1)x_2 - ix_3 &= 0 \\ -ix_2 + (i-1)x_3 &= i \end{aligned}$$

Lösung. Stufenindizes sind 1 und 2. Entsprechend der verbleibenden Position setzen wir einen Parameter $x_3 = 2t \in \mathbb{C}$ ein. (Wir hätten natürlich auch $x_3 = t$ wählen können; durch den Trick wollen wir uns das Rechnen mit einigen Brüchen ersparen. Wir finden einen geeigneten Faktor, indem wir die Koeffizienten der „Stufenvariablen“ betrachten.) Nach Umstellen der zweiten Gleichung ergibt sich

$x_2 = (2i+2)t - 1$, sowie durch Einsetzen in die erste

$x_1 = (2i+1)t - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2})$, folglich

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= ((2i+1)t - (\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}), (2i+2)t - 1, 2t) \\ &= (-(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}), -1, 0) + t\cdot((2i+1), (2i+2), 2). \end{aligned}$$

Wir haben eine notwendige und hinreichende Bedingung gefunden und erhalten damit die Lösungsmenge des Gleichungssystems als

$$\left\{ (-(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}), -1, 0) + t\cdot((2i+1), (2i+2), 2) \;\middle|\; t \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.