

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/2/060

(S: Varianten)

Lineare Gleichungssysteme über \mathbb{F}_7

Index: lineares Gleichungssystem, erweiterte Koeffizientenmatrix, gaußscher Algorithmus

Stoffeinheiten: 2/2/7 - 2/2/13 Beschreibung eines linearen Gleichungssystems durch Matrizen und reduzierte Form

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über dem Körper \mathbb{F}_7 , wobei die Koeffizienten durch die Struktur von \mathbb{F}_7 als \mathbb{Z} -Algebra gegeben sind.

$$\begin{aligned}93x_1 + 31x_2 + 34x_3 - 72x_4 &= 50 \\ -22x_1 + 5x_2 - 43x_3 - 25x_4 &= 48 \\ -67x_1 - 17x_2 - 60x_3 + 92x_4 &= 45 \\ 67x_1 - 31x_2 - 71x_3 - 37x_4 &= -59\end{aligned}$$

Lösung. Nach geeigneter Reduktion der Koeffizienten $\text{mod}(7)$ erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= -3\end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

des Systems wird mit dem gaußschen Algorithmus umgeformt; wir erhalten die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

eines äquivalenten Systems. Daraus ergibt sich leicht $\{(2, -1, -1, -3)\}$ als Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.