Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◀ zur Fundstelle

Aufgabe 2/3/110

(S: Varianten)

Beispiele für inverse Matrizen (1)

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen invertierbar ist und geben Sie in diesem Fall die Inverse an.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lösung. Wir erhalten die inverse Matrix, indem wir beispielsweise im ersten Fall (A, E_2) durch Zeilentransformationen äquivalent in eine Matrix (E_2, A') umformen; dies ist genau dann möglich, wenn A invertierbar ist und es gilt dann $A' = A^{-1}$. So ergibt sich im ersten Fall

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Daher ist A invertierbar und $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

Entsprechend (wenn auch mit etwas mehr Mühe) erhalten wir wir in den weiteren Fällen:

B ist nicht invertierbar (auch erkennbar aus $\text{rang}(B) < 3$),

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$D(\lambda)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda \neq \pm 1$; dann gilt

$$D(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.