

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◀ zur Fundstelle

Aufgabe 2/3/132

(S: Varianten)

Inverse Matrizen über Primkörpern (1)

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix, gaußscher Algorithmus, reguläre Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ -29 & -46 \end{pmatrix}$$

über dem endlichen Primkörper $\mathbf{F}_{97}$.

Lösung. Wir erhalten die inverse Matrix, indem wir beispielsweise (A, E_2) durch Zeilentransformationen äquivalent in eine Matrix (E_2, A') umformen. Ist dies möglich, so gilt $A' = A^{-1}$. Dabei werden wir unter Vermeidung von Divisionen zunächst eine Matrix (D, A'') erzeugen, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Ausgehend von

$$\begin{pmatrix} 3 & -13 & 1 & 0 \\ -29 & -46 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich schrittweise

$$\begin{pmatrix} 3 & -13 & 1 & 0 \\ 0 & -30 & 29 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 & 0 & -41 & 39 \\ 0 & -30 & 29 & 3 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit D^{-1} führt nun auf die Lösung. Dazu müssen wir die Zahlen 3 und -30 in $\mathbf{F}_{97}$ invertieren. Wegen $49 \cdot 3 = 98 = 1$ ist $-48 = 3^{-1}$. Um -30 zu invertieren, wird der euklidische Algorithmus (vgl. 1/2/26) mit den Zahlen 97 und 30 im Ring $\mathbb{Z}$ ausgeführt, wobei der größte gemeinsame Teiler (d.h. die Zahl 1) als Vielfachensumme der Ausgangszahlen dargestellt wird. Wir setzen $r_{-1} := f$ und $r_0 := -g$. Für $i > 0$ wird mit r_i der Rest bei der i -ten Division bezeichnet. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

$97 : 30 = 3 \text{ Rest } 7$	$r_{-1} - 3 \cdot r_0 = r_1$	$r_1 = f + 3g$
$30 : 7 = 4 \text{ Rest } 2$	$r_0 - 4 \cdot r_1 = r_2$	$r_2 = -4f - 13g$
$7 : 2 = 3 \text{ Rest } 1$	$r_1 - 3 \cdot r_2 = r_3$	$r_3 = 13f + 42g$

Die erste Spalte enthält den euklidischen Algorithmus. In der zweiten Spalte sind die Regeln zur Bildung der letzten Spalte angegeben. Diese entsteht durch Einsetzen der bereits bekannten Ausdrücke und enthält die Darstellung der Reste als Vielfachensummen. So ergibt sich

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$1 = 13f + 42g.$$

In $\mathbb{F}_{97}$ ergibt sich (vgl. 1/2/29)

$$42 = -30^{-1}.$$

Multiplikation der zuletzt gefundenen Matrix mit D^{-1} ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -46 & 13 \\ 0 & 1 & -43 & 29 \end{pmatrix},$$

daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -46 & 13 \\ -43 & 29 \end{pmatrix}.$$