

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/4/040

(S: Varianten)

Nullstellenbestimmung mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, Nullstellenmenge

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Es seien $f_1, f_2, \dots, f_n \in K[X]$ Polynome und $d \in K[X]$ ihr größter gemeinsamer Teiler. Beweisen Sie, dass $V(\{f_1, f_2, \dots, f_n\}) = V(\{d\})$ ist und verwenden Sie diese Eigenschaft zur Berechnung der folgenden Nullstellenmengen.

- (1) $V(\{X^6 - 7X^4 + 2X^3 + 4X^2 - 4X - 2, 3X^5 - 5X^4 - 3X^3 - 8X^2 + 4X + 3\}) \subseteq \mathbb{R}$,
- (2) $V(\{2X^4 - 4X^3 - 11X^2 + 13X + 6, 6X^5 - 26X^4 + 25X^3 - 4X^2 + 2X + 3, 6X^4 - 8X^3 + X^2 - X - 1\}) \subseteq \mathbb{C}$,
- (3) $V(\{X^6 - 2X^5 - X^4 - 2X^3 + 2X^2 + X + 1, X^7 - X^6 + 2X^5 - X^4 - X^3 + 2X - 2\}) \subseteq \mathbb{F}_5$.

Hinweise zur Lösung.

- (1) Als Nullstellenmenge ergibt sich $V(\{X^2 - 2X - 1\})$ und aus den leicht zu bestimmenden Nullstellen des Polynoms das Resultat.
- (2) Die Nullstellenmenge ist $V(\{2X^3 - 8X^2 + 5X + 3, 6X^4 - 8X^3 + X^2 - X - 1\}) = V(\{2X^2 - 2X - 1\})$; das zuletzt gefundene Polynom ist wiederum leicht zu faktorisieren.
- (3) Die Nullstellenmenge ist $V(\{2X^4 - X^3 + 2X^2 + 2\}) = \{1, 3\}$.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.