

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/4/050

(S: Varianten)

Nullstellen rationaler Polynome

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, Nullstellenmenge

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Wir bezeichnen mit $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$ ein Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$, das ganzzahlige Koeffizienten a_i hat. Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f . Angenommen $\alpha = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $(a, b) = 1$.

- (1) Zeigen Sie: $a \mid a_n$ und $b \mid a_0$.
- (2) Benutzen Sie diese Eigenschaft zur Bestimmung aller Nullstellen des Polynoms $f = 15X^5 - 37X^4 + 92X^3 - 180X^2 + 85X + 25$ im Körper der komplexen Zahlen.

Hinweis zur Lösung.

Wir finden die rationalen Nullstellen 1 , $-\frac{1}{5}$ und $\frac{5}{3}$ für f und damit

$$f = (3X - 5)(X - 1)(5X + 1)(X^2 + 5).$$

Der letzte Faktor besitzt ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen, die leicht angegeben werden können.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.