

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/5/020

(S: Varianten)

Matrixordnungen (2)

Index: Monomordnung, Matrixordnung

Stoffeinheiten: 2/5/8 - 2/5/16 Monomordnungen und Division mit Rest

Wir betrachten die Monomordnung $<_A$ für $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ordnen Sie die Menge

$$M = \{X_1^2, X_1X_2, X_1X_3, X_2^2, X_2X_3, X_3^2\}$$

bezüglich $<_A$.

Lösung. Offensichtlich ist A regulär und enthält insbesondere in der ersten Zeile nur positive Einträge; daher wird durch diese Matrix tatsächlich eine Monomordnung definiert. Für ein beliebiges Monom $q = X_1^{u_1} X_2^{u_2} X_3^{u_3}$ bilden wir $p = X_1^{v_1} X_2^{v_2} X_3^{v_3}$, wobei v_1, v_2, v_3 durch

$$(v_1 \ v_2 \ v_3) = A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. f sei die Abbildung $q \mapsto p$ der Menge der Monome aus $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ in sich. Sie ist bijektiv, da A regulär ist. Wir bestimmen nun die lexikographische Ordnung der Menge $N := f(M)$,

$$N = \{X_1^6 X_2^{12} X_3^{12}, X_1^7 X_2^{11} X_3^6, X_1^8 X_2^{10}, X_1^5 X_2^{12} X_3^{11}, X_1^6 X_2^{11} X_3^5, X_1^4 X_2^{12} X_3^{10}\}.$$

Das größte Monom in N ist $X_1^8 X_2^{10}$.

Das bedeutet, dass $X_2^2 = f^{-1}(X_1^8 X_2^{10})$ das größte Monom von M bezüglich $<_A$ ist.

Entsprechend erhalten wir die Anordnung aller Monome bezüglich $<_A$; es ergibt sich

$$X_2^2 > X_1 X_2 > X_1^2 > X_2 X_3 > X_1 X_3 > X_3^2.$$

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.