Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/5/030 (S: Varianten)
Matrixordnungen (3)

Index: Monomordnung, Matrixordnung

Stoffeinheiten: 2/5/8 - 2/5/16 Monomordnungen und Division mit Rest

Wir betrachten die Monomordnung $<_A$ für $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ordnen Sie die Menge

$$M = \{X_1^3X_2, X_1X_2X_3^2, X_1X_2^2X_3, X_1^2X_3, X_2X_3^3, X_1^2X_2X_3^2\}$$

bezüglich $<_A$.

Lösung. Offensichtlich ist A regulär und enthält insbesondere in der ersten Zeile nur positive Einträge; daher wird durch diese Matrix tatsächlich eine Monomordnung definiert. Für ein beliebiges Monom $q = X_1^{u_1}X_2^{u_2}X_3^{u_3}$ bilden wir $p = X_1^{v_1}X_2^{v_2}X_3^{v_3}$, wobei v_1, v_2, v_3 durch

$$(\, v_1 \; v_2 \; v_3 \,) = A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. f sei die Abbildung $q \mapsto p$ der Menge der Monome aus $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ in sich. Sie ist bijektiv, da A regulär ist. Wir bestimmen nun die lexikographische Ordnung der Menge $N := f(M)$,

$N = \{X_1^5X_2^{11}X_3^3, X_1^9X_2^{11}X_3^3, X_1^8X_2^{10}X_3^6, X_1^5X_2^9, X_1^{11}X_2^{11}X_3^3, X_1^{10}X_2^{14}X_3^3\}$.

Das größte Monom in N ist $X_1^{11}X_2^{11}X_3^3$.

Das bedeutet, dass $X_2X_3^3 = f^{-1}(X_1^{11}X_2^{11}X_3^3)$ das größte Monom von M bezüglich $<_A$ ist. Entsprechend erhalten wir die Anordnung aller Monome bezüglich $<_A$; es ergibt sich

$$X_2X_3^3 > X_1^2X_2X_3^2 > X_1X_2X_3^2 > X_1X_2^2X_3 > X_1^3X_2 > X_1^2X_3.$$

---

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.