

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/5/040

(S: Varianten)

Gröbnerbasen (1)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g ,

$$f = X_1^2 + X_2^{18} X_3^{11}, \quad g = X_1 X_2 + X_2^{10} X_3^{10}$$

erzeugt wird.

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen

$$S(f, g) = X_2 \cdot f - X_1 \cdot g = -X_1 X_2^{10} X_3^{10} + X_2^{19} X_3^{11}.$$

Nun ergibt sich der Rest von $S(f, g)$ bei Division durch (f, g) als

$$q := X_2^{19} X_3^{20} + X_2^{19} X_3^{11}.$$

$S(f, q)$ ist bezüglich (f, q) speziell erzeugbar (vgl. Lemma 2/5/27).

Wir berechnen $S(g, q)$ wie oben und sehen, dass bei Division durch (g, q) der Rest 0 auftritt, denn

$$\begin{aligned} S(g, q) &= X_2^{18} X_3^{11} \cdot g - X_1 \cdot q = -X_1 X_2^{19} X_3^{20} + X_2^{28} X_3^{21} \\ &= -X_2^{18} X_3^{20} \cdot g + X_2^9 X_3^{10} \cdot q. \end{aligned}$$

Dann ist

$$(f, g, q) = (X_1^2 + X_2^{18} X_3^{11}, X_1 X_2 + X_2^{10} X_3^{10}, X_2^{19} X_3^{20} + X_2^{19} X_3^{11})$$

eine Gröbnerbasis des von f, g erzeugten Ideals. Wir überzeugen uns leicht davon, dass diese sogar reduziert ist.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.