

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◀ zur Fundstelle

Aufgabe 2/5/070

(S: Varianten)

Gröbnerbasen (4)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g erzeugt wird,

$$f = X_1^2 + X_3^{22}, \quad g = X_1X_2 + X_3^{11}.$$

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen

$$S(f, g) = X_2 \cdot f - X_1 \cdot g = -X_1X_3^{11} + X_2X_3^{22}.$$

Wir setzen $h := X_1X_3^{11} - X_2X_3^{22}$ und sehen, dass

$$S(f, h) = X_3^{11} \cdot f - X_1 \cdot h = X_3^{22} \cdot g$$

und

$$S(g, h) = X_3^{11} \cdot g - X_2 \cdot h = X_2^2X_3^{22} + X_3^{22}$$

ist. Wir setzen $q = X_2^2X_3^{22} + X_3^{22}$ und bemerken, dass $S(f, q)$ bezüglich (f, q) speziell erzeugbar ist (vgl. Lemma 2/5/27).

Wir berechnen $S(g, q)$ wie oben und sehen, dass der Rest bei Division durch (g, q) gleich 0 ist,

$$S(g, q) = X_2X_3^{22} \cdot g - X_1 \cdot q = -X_3^{11} \cdot h.$$

Offensichtlich haben wir

$$S(h, q) = X_2^2X_3^{11} \cdot h - X_1 \cdot q = -X_3^{11} \cdot h - X_2X_3^{11} \cdot q.$$

Daher ist

$$(f, g, h, q) = (X_1^2 + X_3^{22}, X_1X_2 + X_3^{11}, X_1X_3^{11} - X_2X_3^{22}, X_2^2X_3^{22} + X_3^{22})$$

eine Gröbnerbasis des von f, g erzeugten Ideals. Wir überzeugen uns leicht davon, dass diese sogar reduziert ist.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.