

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/5/080

(S: Varianten)

Gröbnerbasen (5)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g erzeugt wird,

$$f = X_1^2 + X_2^2 X_3^4, \quad g = X_1 X_2^6 + X_2^5 X_3^2.$$

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen

$$S(f, g) = X_2^6 \cdot f - X_1 \cdot g = -X_1 X_2^5 X_3^2 + X_2^8 X_3^4.$$

Wir setzen $h := X_1 X_2^5 X_3^2 - X_2^8 X_3^4$ und sehen, dass

$$S(f, h) = X_2^5 X_3^2 \cdot f - X_1 \cdot h = X_2^2 X_3^4 \cdot g$$

und

$$S(g, h) = X_3^2 \cdot g - X_2 \cdot h = X_2^9 X_3^4 + X_2^5 X_3^4$$

ist. Mit $q := X_2^9 X_3^4 + X_2^5 X_3^4$ bemerken wir, dass $S(f, q)$ bezüglich (f, q) speziell erzeugbar ist (vgl. Lemma 2/5/27). Wir berechnen $S(g, q)$ wie oben und sehen, dass bei Division durch (g, q) der Rest 0 auftritt,

$$S(g, q) = X_2^3 X_3^4 \cdot g - X_1 \cdot q = -X_3^2 \cdot h.$$

Offensichtlich gilt

$$S(h, q) = X_2^4 X_3^2 \cdot h - X_1 \cdot q = -X_3^2 \cdot h - X_2^3 X_3^2 \cdot q.$$

Daher ist

$$(f, g, h, q) =$$

$$(X_1^2 + X_2^2 X_3^4, X_1 X_2^6 + X_2^5 X_3^2, X_1 X_2^5 X_3^2 - X_2^8 X_3^4, X_2^9 X_3^4 + X_2^5 X_3^4)$$

eine Gröbnerbasis des von f, g erzeugten Ideals. Wir überzeugen uns leicht davon, dass diese sogar reduziert ist.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.