Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 2/5/090 (S: Varianten)
Gröbnerbasen (6)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g erzeugt wird,

$$f = X_1^2 + X_2^6 X_3^4, \quad g = X_1 X_2^{18} + X_2^5 X_3^2.$$

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen

$$\mathrm{S}(f,g) = X_2^{18}\cdot f - X_1\cdot g = -X_1 X_2^5 X_3^2 + X_2^{24} X_3^4.$$

Wir setzen $h := X_1 X_2^5 X_3^2 - X_2^{24} X_3^4$ und erhalten

$$\mathrm{S}(f,h) = X_2^5 X_3^2\cdot f - X_1\cdot h = X_2^6 X_3^4\cdot g,$$
$$\mathrm{S}(g,h) = X_3^2\cdot g - X_2^{13}\cdot h = X_2^{37} X_3^4 + X_2^5 X_3^4.$$

Mit $q := X_2^{37} X_3^4 + X_2^5 X_3^4$ ergibt sich, dass $S(f,q)$ bezüglich (f,q) speziell erzeugbar ist (vgl. Lemma 2/5/27). Wir berechnen $\mathrm{S}(g,q)$ wie oben und sehen, dass dieses Polynom bei Division durch (h,g,q) den Rest 0 hat, denn

$$\mathrm{S}(g,q) = X_2^{19} X_3^4\cdot g - X_1\cdot q = -X_3^2\cdot h.$$

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(h,q) &= X_2^{32} X_3^2\cdot h - X_1\cdot q = -X_1 X_2^5 X_3^4 - X_2^{56} X_3^6 \\ &= -X_3^2\cdot h - X_2^{19} X_3^2\cdot q\end{aligned}$$

speziell erzeugt bezüglich (h,q). Daher erhalten wir

$$(f,g,h,q) = (X_1^2 + X_2^6 X_3^4, X_1 X_2^{18} + X_2^5 X_3^2, X_1 X_2^5 X_3^2 - X_2^{24} X_3^4, X_2^{37} X_3^4 + X_2^5 X_3^4)$$

als Gröbnerbasis des von f,g erzeugten Ideals. Diese ist offensichtlich reduziert.

---

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.