

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◀ zur Fundstelle

Aufgabe 3/2/041

(S: Varianten)

Lineare Codes, Decodierung (2)

Index: Vektorraum, Code, Maximum-Likelihood Decodierung

Stoffeinheiten: 3/2/12 - 3/2/16 Der Homomorphiesatz für Vektorräume

C sei der lineare Code im 6-dimensionalen Standardraum über $\mathbb{F}_2$, der als Lösungsmenge von $A \cdot^t x = 0$ in $\mathbb{F}_2^6$ gegeben ist, wobei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

bezeichnet. Decodieren Sie die Wörter

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 0, 1, 1), \mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 0, 0, 1).$$

Lösung. Eine Basis von C ist durch

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0, 0, 1, 0)$$

gegeben. Die Wörter

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \mathbf{a}_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0), \mathbf{a}_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

erzeugen in $\mathbb{F}_2^6$ einen linearen Unterraum L mit $L \oplus C = \mathbb{F}_2^6$. Dann ist $\mathbb{F}_2^6$ Vereinigung von Klassen der folgenden Vektoren modulo C :

$$\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3.$$

Wir setzen

$$\mathbf{a}_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 1), \mathbf{a}_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 0), \mathbf{a}_6 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

und bemerken, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_4 + \mathbf{v}_1, & \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_6 + \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_5 + \mathbf{v}_2, & \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

$\mathbb{F}_2^6$ ist nun Vereinigung von Klassen der folgenden Vektoren modulo C :

$$\mathbf{0}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_5.$$

Offensichtlich haben diese Wörter minimales Gewicht. Wir sehen, dass

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_6 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_5 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1$$

ist. Damit werden $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ bzw. $\mathbf{u}_3$ durch

$$\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1, 1, 0, 0),$$

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0, 1, 1),$$

$$\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

decodiert.