Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/3/090 (S: Varianten)
Basen und Koordinaten (1)

Index: Vektorraum, Basis eines Vektorraumes, Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/3/5 - 3/3/16 Basen von Vektorräumen

Nachfolgend ist in jedem Fall ein Vektorraum V mit einer Familie $\mathcal{B}$ von Vektoren gegeben. Prüfen sie jeweils, ob $\mathcal{B}$ eine Basis ist und bestimmen Sie in diesem Fall die Koordinaten von $\boldsymbol{x} \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$.

(1) $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ mit $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ im Standardraum $V = \mathbb{R}^3$ sowie $\boldsymbol{x} = (-2,0,-2)$.
(2) V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} := (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ mit $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,-1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,1,1)$ und $\boldsymbol{x} = (1,3,0)$.
(3) V sei der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$, sowie $\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(1,1,0))$, $\boldsymbol{x} = (1,1,1)$.
(4) $V = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ sei der von $\{1, \sqrt{2}\}$ erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\mathcal{B} := (3, \sqrt{2})$ sowie $\boldsymbol{x} = (1+\sqrt{8})^2$.

Ergebnis.

(1) $\mathcal{B}$ ist eine Basis (kanonische Basis des gegebenen Standardraumes). Die gesuchten Koordinaten sind $(-2,0,-2)$.
(2) $\mathcal{B}$ ist keine Basis.
(3) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ sind $(1,0,0)$.
(4) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ sind $(3,4)$.

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.