Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/3/160 (S: Varianten)
Basen von Komplementärräumen

Index: Vektorraum, Unterraum, Basis eines Vektorraumes, linear unabhängige Vektoren, Komplementärraum

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Bestimmen Sie im reellen Standardraum $\mathbb{R}^5$ einen Komplementärraum zum Unterraum

$$U := \mathbb{R}\cdot(-1,0,0,1,0) + \mathbb{R}\cdot(0,0,1,0,1) + \mathbb{R}\cdot(0,-1,1,0,0)$$

und beschreiben Sie ihn durch eine Basis.

Ergebnis. Wir wenden eine Variante des Austauschverfahrens an, indem wir die gegebenen Erzeugenden $\boldsymbol{w}_1 = (-1,0,0,1,0)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,0,1,0,1)$ und $\boldsymbol{w}_3 = (0,-1,1,0,0)$ als Spalten einer Matrix A anordnen und die Matrix

$$B := (A, \mathrm{E}_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Zeilenoperationen in eine Stufenmatrix

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

überführen. Durch die Positionen der Stufenindizes wird aus dem Erzeugendensystem $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_5\}$ eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^5$ ausgewählt, die eine Basis von U enthält (wir mussten auf diese Weise nicht voraussetzen, dass die Vektoren $\boldsymbol{w}_i$ linear unabhängig sind).
Die Vektoren $\boldsymbol{e}_i$ zu den verbleibenden Stufenpositionen erzeugen einen Komplementärraum für U, dieser besitzt damit eine Basis

$$((1,0,0,0,0),\ (0,1,0,0,0)).$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.