

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/3/190

(S: Varianten)

Basen in Faktorräumen

Index: Vektorraum, Unterraum, Faktorraum, Basis eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Im Standardvektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei durch $U := \mathbb{R} \cdot \mathbf{a} + \mathbb{R} \cdot \mathbf{b}$ ein Unterraum gegeben mit $\mathbf{a} = (2, 1, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (0, -2, 2, 1)$.

(1) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = (-2, -2, 2, 0) \text{ und } \mathbf{v}_2 = (-8, -3, 0, 2)$$

dieselbe Klasse im Faktorraum V/U haben.

(2) Geben Sie eine Basis für V/U an.

(3) Geben Sie die Klasse des Vektors von $\mathbf{v} = (-2, 0, 0, 0)$ als Vielfachensumme der Vektoren der unter (2) gefundenen Basis an!

Ergebnis.

(1) Es ist $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (-6, -1, -2, 2) = -3 \cdot (2, 1, 0, -1) - 1 \cdot (0, -2, 2, 1) \in U$, daher $\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_2 \in V/U$.

(2) Die Klassen der Vektoren: $\mathbf{c} = (1, 0, 0, 0)$ und $\mathbf{d} = (0, 1, 0, 0)$ bilden eine Basis $(\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{d}})$ in V/U .

(3) Es gilt $\bar{\mathbf{v}} = -2 \cdot \bar{\mathbf{c}}$.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.