Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/3/202 (S: Varianten)
Dimension von Bild und Kern, Charakteristik 2

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Dimension eines Vektorraumes, lineare Abbildung

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_2^5 \to \mathbb{F}_2^5$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Lösung. Es ist $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 5 - \dim(\ker(\varphi))$. Wir bestimmen den Rang der Matrix A, indem wir sie (beispielsweise mit dem gaußschen Algorithmus) in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix überführen. Es ergibt sich

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = 2,$$

daher $\dim(\ker(\varphi)) = 3$ und $\dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 2$.

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.