

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/3/205

(S: Varianten)

Dimension von Bild und Kern, Charakteristik 5

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Dimension eines Vektorraumes, lineare Abbildung

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_5^5 \rightarrow \mathbb{F}_5^5$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Lösung. Es ist $\text{rang}(A) = \dim(\text{im}(\varphi)) = 5 - \dim(\text{ker}(\varphi))$. Wir bestimmen den Rang der Matrix A , indem wir sie (beispielsweise mit dem gaußschen Algorithmus) in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix überführen. Es ergibt sich

$$\text{rang}(A) = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4,$$

daher $\dim(\text{ker}(\varphi)) = 1$ und $\dim(\text{im}(\varphi)) = 4$.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.