

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/3/270

(S: Varianten)

Bild und Kern eines Endomorphismus

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Basis eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Im K -Vektorraum $V := M(n; K)$ wählen wir eine Matrix A .

- (1) Zeigen Sie, dass die durch $\Psi(X) := X \cdot A - A \cdot X$ definierte Abbildung $\Psi : V \rightarrow V$ linear ist.
- (2) Wir wählen $K = \mathbb{R}$, $n = 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis für $\ker(\Psi)$ an.

Lösung. Wir bestimmen das Resultat zu (2). Dazu schreiben wir die Bedingung

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad X \cdot A - A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als lineares Gleichungssystem für die Zahlen $x_1, \dots, x_4$ auf und erhalten:

$$x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_4 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$-x_3 = 0$$

Das übliche Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme liefert nun die Menge aller Lösungen; insbesondere hat $\ker(\Psi)$ die Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.