Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/4/040 (S: Varianten)
Matrix eines Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{R}^3$, Basiswechsel

Index: Vektorraum, Matrix einer linearen Abbildung, Basiswechsel für lineare Abbildungen, Übergangsmatrix, Transformationsformel für Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/4/1 - 3/4/8 Die Matrix einer linearen Abbildung

P_2 sei der Unterraum der Polynome vom Grad ≤ 2 im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten über $\mathbb{R}$. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : \mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_2$, die bezüglich der Basis $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ durch die folgende Matrix

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (X^2 - 2X + 2, -X^2 + X + 2, 2X^2 + X + 2)$ eine Basis von P_2 ist.

(2) Bestimmen Sie $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Ergebnis (2). Es ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -15 & -6 \\ 21 & -7 & 8 \\ -3 & 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.