Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/4/050 (S: Varianten)
Matrix eines Endomorphismus eines Unterraumes von $\mathbb{R}[X]$, Basiswechsel

Index: Vektorraum, Matrix einer linearen Abbildung, Basiswechsel für lineare Abbildungen, Übergangsmatrix, Transformationsformel für Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/4/1 - 3/4/8 Die Matrix einer linearen Abbildung

P_2 sei der Unterraum der Polynome vom Grad ≤ 2 im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten über $\mathbb{R}$. Das Tripel $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ ist offensichtlich eine Basis von P_2. Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung ist nun durch

$$1 \mapsto X\,, \quad X \mapsto X^2\,, \quad X^2 \mapsto 1$$

eine lineare Abbildung $\varphi : \mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_2$ definiert.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (-X^2 + 2, -1, -X - 1)$ eine Basis von P_2 ist.

(2) Bestimmen Sie $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Ergebnis (2). Es ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.