

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/5/041

(S: Varianten)

Gleichungen für Unterräume im $\mathbb{R}^4$

Index: Vektorraum, Unterraum, Gleichungssystem für einen Unterraum

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

$U := \mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w} \subseteq \mathbb{R}^4$ sei der Unterraum im 4-dimensionalen Standardvektorraum, der durch

$$\mathbf{v} = (2, -3, 3, -2), \quad \mathbf{w} = (0, 3, 2, -3)$$

gegeben wird. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge U !

Lösung. W bezeichne den Raum der Linearformen auf $\mathbb{R}^4$, die auf U verschwinden. Dann gilt mit $W = U^\perp$

$$W = \{\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^4)^* \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0\}.$$

Ist (x_1, x_2, x_3, x_4) das Koordinatenquadrupel eines Vektors $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^4)^*$ bezüglich der dualen Basis $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_4^*)$ der kanonischen, so ist die Bedingung $\mathbf{u} \in W$ äquivalent dazu, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Eine zeilenäquivalente Umformung der Koeffizientenmatrix ergibt die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

aus der sich eine Basis $((-15, -4, 6, 0), (5, 2, 0, 2))$ der Lösungsmenge ablesen lässt. Bezeichnet A die Matrix mit diesen Zeilen, so ist $Ax = 0$ ein Gleichungssystem für $W^\perp$, wir erhalten daher

$$\begin{aligned} -15x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

als lineares Gleichungssystem mit der Nullstellenmenge U .

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.