Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 3/5/051 (S: Varianten)
Basis des Durchschnitts zweier Unterräume im $\mathbb{R}^4$ (2)

Index: Vektorraum, Unterraum, Gleichungssystem für einen Unterraum, Basis eines Vektorraumes, Dimension eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

V bezeichne den reellen Standardraum $\mathbb{R}^4$.

(1) $V_1 \subseteq V$ sei der durch die Gleichung $x_1 - x_3 + x_4 = 0$ definierte Unterraum. Geben Sie ein Erzeugendensystem für V_1 an.

(2) Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem für $V_1 \cap V_2$,
$$V_2 := \mathbb{R} \cdot (2, -2, 1, 2) + \mathbb{R} \cdot (-2, 0, -1, -1).$$

(3) Welche Dimensionen haben die Vektorräume V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ und $V_1 + V_2$?

Ergebnis.

(1) V_1 wird von den Vektoren aus
$$((-1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0))$$
erzeugt.

(2) $V_1 \cap V_2$ ist Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems
$$x_1 - x_2 - 2x_4 = 0$$
$$x_1 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 - x_3 + x_4 = 0$$
und
$$((-2, -4, -1, 1))$$
eine Basis von $V_1 \cap V_2$.

(3) Es ist $\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 2$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ und $\dim(V_1 + V_2) = 4$.

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.