Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 4/2/009 (S: Varianten)
Erste Schritte mit Determinanten

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/1 - 4/2/9 Der Hauptsatz der Determinantentheorie

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ -5 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung geeigneter Zeilentransformationen für A.

Lösung. $a_{11} = 0$, daher wird – wie beim gaußschen Algorithmus – zunächst die erste Zeile mit der zweiten vertauscht. Dabei ändert sich das Vorzeichen der Determinante, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ -5 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nun können Vielfache der ersten Zeile von den folgenden subtrahiert werden, so dass die Einträge a_{i1} verschwinden. Wir erhalten eine neue Matrix mit derselben Determinante, und entsprechend wird mit der zweiten Zeile verfahren, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Da wir ungern mit Brüchen rechnen, werden die 3. und 4. Zeile der zuletzt aufgetretenen Matrix mit -4 bzw. 5 multipliziert; entsprechend erhält die Determinante den Faktor $(-\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{20}$. Es ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & -32 \\ 0 & 0 & -20 & 35 \end{pmatrix},$$

daher nach Subtraktion der dritten Zeile von der vierten

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$-\det(A) = -\frac{1}{20}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 67 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{20}\cdot 1\cdot 1\cdot(-20)\cdot 67 = 67.$$

Wir erhalten $\det(A) = -67$.

Das hier verwendete Verfahren zur Bestimmung der Determinante ist eine Variante des gaußschen Algorithmus. Es ist allgemein ausführbar und beruht auf den folgenden Eigenschaften.

(1) Bei Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen bleibt die Determinante einer Matrix unverändert.

(2) Bei Multiplikation einer Zeile der Matrix A mit einer Zahl c wird $\det(A)$ in $c{\cdot}\det(A)$ überführt.

(3) Durch Vertauschen zweier Zeilen der Matrix A wird $\det(A)$ in $-\det(A)$ überführt.

(4) Die Determinante einer (z.B. oberen) Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge ihrer Hauptdiagonale.