Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◃ zur Fundstelle

Aufgabe 4/2/050 (S: Varianten)
Determinanten mit Parametern (2)

Index: Determinante eines Endomorphismus, multilineare Abbildung, Automorphismus

Stoffeinheiten: 4/2/21 - 4/2/25 Die Determinante eines Endomorphismus

Welcher der folgenden Endomorphismen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ein Automorphismus?

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3)$.

(2) $f_t(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2 + x_3, tx_2 + x_1 + x_3, 2tx_2 + 2x_3)$
(für eine gegebene Zahl $t \in \mathbb{R}$).

Lösung.

(1) Die Matrix von f ist
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$
sie hat die Determinante
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -24.$$
Daher ist f ein Automorphismus.

(2) Die Matrix von f_t ist
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 2t & 2 \end{pmatrix},$$
für ihre Determinante ergibt sich

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 2t & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -2t+2 & -1 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 2t & 2 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} -2t+2 & -1 \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = 2t-4.
\end{aligned}$$

Daher ist f_t genau dann ein Automorphismus, wenn $t \neq 2$.