Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 4/2/100 (S: Varianten)
Determinanten mit Parametern (3)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, Rangbestimmung mit Unterdeterminanten

Stoffeinheiten: 4/2/19 - 4/2/20 Rangbestimmung mit Unterdeterminanten

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A in Abhängigkeit von den Parametern s, t aus dem Körper K.

$$A = \begin{pmatrix} -2t-2s & 2t-10s & -2t \\ 3t+s & t+s & -5t+8s \\ 3t-9s & -3t+3s & 3t-8s \end{pmatrix}$$

Lösung. Eine prinzipielle Möglichkeit zur Behandlung solcher Aufgaben ist durch das Determinantenkriterium gegeben; dazu sind die Nullstellen aller Determinanten quadratischer Teilmatrizen zu untersuchen. Wir gehen hier anders vor, dabei werden die folgenden Fälle unterschieden.

(1) $s = t = 0$, dann ist $A = 0$ und folglich $\mathrm{rang}(A) = 0$.

(2) $s = 0$ und $t \neq 0$; dann ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} -2t & 2t & -2t \\ 3t & t & -5t \\ 3t & -3t & 3t \end{pmatrix}.$$

Wegen $t \neq 0$ ist $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\frac{1}{t} \cdot A)$,

$$\frac{1}{t} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

also $\mathrm{rang}(A) = 2$.

(3) $s \neq 0$, so ist $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\frac{1}{s} \cdot A)$. Setzen wir $u = \frac{t}{s}$, so ist

$$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} -2u-2 & 2u-10 & -2u \\ 3u+1 & u+1 & -5u+8 \\ 3u-9 & -3u+3 & 3u-8 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinante

$$\begin{vmatrix} -2u-2 & 2u-10 & -2u \\ 3u+1 & u+1 & -5u+8 \\ 3u-9 & -3u+3 & 3u-8 \end{vmatrix} = 352u^2 - 1056u + 704$$

---

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

und erhalten für $u \neq 1, 2$ (i.e. $t \neq s, 2s$) einen von 0 verschiedenen Wert, also $\mathrm{rang}(A) = 3$. Für $u = 1$ ist

$$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

also $\mathrm{rang}(A) = 2$. Für $u = 2$ ist

$$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 7 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

folglich $\mathrm{rang}(A) = 2$.