Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 4/2/150 (S: Varianten)
Cramersche Regel

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, cramersche Regel

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Lösen Sie unter Verwendung von Determinanten die folgenden Gleichungssysteme.

(1) $$\begin{cases} -x - 2y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} y + z = -2y + z - 2 \\ x - z = -2y + z - 1 \\ x - y - z = y + 2z - 2 \end{cases}$$

Lösung.

(1) Es ist
$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$
Daher folgt
$$x = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$
Entsprechend gilt
$$y = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

(2) Wir schreiben das System in der üblichen Form:
$$\begin{aligned} 3y &= -2 \\ x + 2y - 2z &= -1 \\ x - 2y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

Für die Determinante der Koeffizientenmatrix ergibt sich
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3.$$

Also ist

$$x = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{23}{3},$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3},$$

$$z = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{11}{3},$$

womit wir die gesuchte Lösung (x, y, z) erhalten haben.