Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 4/2/180 (S: Varianten)
Endomorphismen und Determinanten (1)

Index: Determinante eines Endomorphismus, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/21 - 4/2/25 Die Determinante eines Endomorphismus

Nachfolgend sind lineare Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume angegeben. Bestimmen Sie in jedem Fall die Determinante.

(1) $\varphi : K^n \to K^n$, wobei $\varphi(x_1, \dots, x_n) := (x_1, x_2, 0, \dots, 0)$ ist und $n \geq 2$,

(2) $\varphi : V \to V$, wobei $\varphi(v) := 9v$ ist,

(3) $K = \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_2).$$

Lösung.

(1) Der Endomorphismus hat bezüglich der Standardbasis die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist 1 für $n = 2$ und 0 sonst.

(2) Die Matrix des Endomorphismus bezüglich der Standardbasis ist

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 9 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 9 \end{pmatrix},$$

seine Determinante daher $9^{\dim(V)}$.

(3) Die Matrix des Endomorphismus φ bezüglich der Standardbasis ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

denn ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{S}_j(A) = \varphi(\boldsymbol{e}_j)$. Es folgt

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\det(\varphi) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$