Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 4/3/060 (S: Varianten)

Diagonalisierung einer quadratischen Form

Index: quadratische Form, symmetrische Matrix einer quadratischen Form, symmetrische Diagonalform, Diagonalisierung

Stoffeinheiten: 4/3/5 - 4/3/16 Quadratische Formen

Es sei $A \in M(n;\mathbb{R})$, sowie $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}\cdot A\cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}$ definierte quadratische Form.

(1) Zeigen Sie, dass der Wert von $\boldsymbol{q}$ nur von $A + {}^{\mathrm{t}}A$ abhängt. Folgern Sie, dass A stets durch eine eindeutig bestimmte symmetrische Matrix B ersetzt werden kann, ohne dass sich dabei die Abbildung $\boldsymbol{q}$ ändert.

(2) Es sei $n = 3$,

$$\boldsymbol{q}(x_1, x_2, x_3) := 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + x_3^2.$$

Bestimmen Sie die gemäß (1) existierende symmetrische Matrix B mit der Eigenschaft $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot B \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

(3) Geben Sie eine Basis des Standardraumes $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich der die unter (2) definierte Form $\boldsymbol{q}$ eine Diagonalmatrix besitzt.

Ergebnis.

(2)
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Wir verwenden den symmetrischen gaußschen Algorithmus oder (ganz naiv) die Methode der quadratischen Ergänzung. So ergibt sich eine Basis

$$\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(-1,0,2)),$$

bezüglich der $\boldsymbol{q}$ die Diagonalmatrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{q}) = \mathrm{diag}(2,3,2)$$

hat, d.h. $\boldsymbol{q}$ ist äquivalent zur quadratischen Form

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2\,.$$

Wer Lust dazu hat, kann durch Multiplikation der Basisvektoren mit Konstanten nun noch erreichen, dass die quadratische Form in die äquivalente Gestalt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ transformiert wird.

---

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.