

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 4/3/130

(S: Varianten)

Bestimmung symplektischer Basen

Index: alternierende Bilinearform, symplektische Basis

Stoffeinheiten: 4/3/17 - 4/3/20 Alternierende Bilinearformen

Bestimmen Sie für die nichtausgeartete alternierende Bilinearform $\mathbf{b}$ auf dem Standardraum $\mathbb{R}^4$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert wird, eine symplektische Basis.

Lösung. Definitionsgemäß ist $\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot A \cdot {}^t\mathbf{y}$ die durch A definierte alternierende Form. Unter den Vektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4$ der kanonischen Basis suchen wir zunächst ein Paar, für das $\mathbf{b}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \neq 0$ ist. Offenbar ist dies bereits für $\mathbf{b}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 3$ erfüllt. Wir setzen

$$\mathbf{b}_1 := \frac{1}{\mathbf{b}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}(1, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{b}_2 := \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0).$$

Es ergibt sich eine Basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ des von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ erzeugten Unterraumes, bezüglich der die Einschränkung von $\mathbf{b}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Nun wird als Komplementärraum zu $\mathbb{R}\mathbf{b}_1 + \mathbb{R}\mathbf{b}_2$ der Unterraum W aller Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ bestimmt, für die $\mathbf{b}(\mathbf{b}_1, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{b}_2, \mathbf{x}) = 0$ ist. W ist in unserem Fall die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix aus den ersten beiden Zeilen von A besteht. Wir erhalten als Erzeugendensystem die Vektoren

$$\mathbf{v}_3 = (3, -2, 0, 3),$$

$$\mathbf{v}_4 = (-2, 1, 3, 0).$$

Entsprechend wird nun

$$\mathbf{b}_3 := \frac{1}{\mathbf{b}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)} \cdot \mathbf{v}_3 = \frac{1}{15}(-3, 2, 0, -3),$$

$$\mathbf{b}_4 := \mathbf{v}_4 = (-2, 1, 3, 0)$$

gesetzt. Wir erhalten eine Basis $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4)$, für die $\mathbf{b}$ die Matrix

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$M_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, d.h. $\mathcal{B}$ ist symplektisch.