Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◃ zur Fundstelle

Aufgabe 4/4/070 (S: Varianten)
Das Kroneckerprodukt (2)

Index: Kroneckerprodukt, Tensorprodukt von Matrizen, Basis eines Tensorprodukts

Stoffeinheiten: 4/4/11 - 4/4/12 Kroneckerprodukt von Matrizen

Es seien $\varphi : V \to W$ und $\varphi' : V' \to W'$ lineare Abbildungen der reellen Standardräume $V = \mathbb{R}^2$, $V' = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$ bzw. $W' = \mathbb{R}^3$. Die Homomorphismen φ, φ' werden durch

$$\varphi(x, y) = (-y, x - y)\,,$$
$$\varphi'(x, y) = (x + y, -x + 3y, 0)$$

definiert. Geben Sie die Tensorprodukte der Standardbasen für $V \otimes V'$ sowie $W \otimes W'$ an und bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung $\varphi \otimes \varphi' : V \otimes V' \to W \otimes W'$ bezüglich dieser Basen.

Ergebnis. Mit $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$, $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ bzw. $(\boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}'_2, \boldsymbol{f}'_3)$ bezeichnen wir die Standardbasen für V, V', W bzw. W'. Dann erhalten wir als Tensorprodukte die Basen

$$(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_2) \quad \text{und}$$
$$(\boldsymbol{f}_1 \otimes \boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}_1 \otimes \boldsymbol{f}'_2, \boldsymbol{f}_1 \otimes \boldsymbol{f}'_3, \boldsymbol{f}_2 \otimes \boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}_2 \otimes \boldsymbol{f}'_2, \boldsymbol{f}_2 \otimes \boldsymbol{f}'_3)$$

für $V \otimes V'$ bzw. $W \otimes W'$. Der Homomorphismus $\varphi \otimes \varphi'$ hat bezüglich dieser Basen die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

wir erhalten sie durch direkte Rechnung oder als Kroneckerprodukt der Matrizen von φ und φ' bezüglich der kanonischen Basen.

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.