Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 5/1/010 (S: Varianten)
Charakteristische Polynome reeller Matrizen

Index: charakteristisches Polynom einer Matrix, Begleitmatrix

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Das charakteristische Polynom χ_A ist gleich der Determinante

$$\det(X \cdot \mathrm{E}_5 - A) \in \mathbb{R}[X].$$

Die Determinante der charakteristischen Matrix $B = X \cdot \mathrm{E}_5 - A$ wird nach der letzten Zeile mit den Adjunkten B'_{5i} $(i = 1, ..., 5)$ entwickelt, das sind die folgenden Matrizen:

$$B'_{51} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \end{pmatrix}, \quad B'_{52} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \end{pmatrix}$$

$$B'_{53} = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \end{pmatrix}, \quad B'_{54} = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B'_{55} = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

Die Adjunkten sind entweder obere oder untere Dreiecksmatrizen oder aus solchen blockdiagonal zusammengesetzt. Mit den Diagonalelementen $b^{(i)}_{kk}$ der Adjunkten gilt daher

$$\det(B'_{5i}) = \prod_{k=1}^{4} b^{(i)}_{kk}.$$

Es folgt

$$\chi_A = X^5 - 4X^4 - X^3 - 2X^2 + 2X - 1.$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.