

Marko Roczen und Helmut Wolter  
unter Mitarbeit von  
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

## Aufgabensammlung<sup>1</sup>

### Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

#### Aufgabe 5/2/024

(S: Varianten)

Diagonalisierbarkeit in der Dimension 3 (1)

**Index:** diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

**Stoffeinheiten:** 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Entscheiden Sie, welche der folgenden drei Matrizen  $A^{(i)}$  über dem Körper  $\mathbb{R}$  diagonalisierbar ist:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Hinweis.** Jede der Matrizen hat die Zahl 1 als Eigenwert.

**Lösung.** Um eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen, werden zunächst ihre Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt.

In unserem Falle sind zunächst die drei charakteristischen Polynome  $\chi_{A^{(i)}}$  aus  $\mathbb{R}[X]$  für  $i = 1, 2, 3$  zu berechnen, d.h. die Determinanten der charakteristischen Matrizen  $B^{(i)} = X \cdot E_3 - A^{(i)}$ . Es gilt

$$\chi_{A^{(i)}} = \det(B^{(i)}).$$

Die leibnizsche Formel (vgl. 4/2/6) führt im Falle der Dimension 3 auf die sarrussche Regel

$$\begin{aligned} \chi_{A^{(i)}} &= b_{11}^{(i)} b_{22}^{(i)} b_{33}^{(i)} + b_{12}^{(i)} b_{23}^{(i)} b_{31}^{(i)} + b_{13}^{(i)} b_{21}^{(i)} b_{32}^{(i)} \\ &\quad - b_{13}^{(i)} b_{22}^{(i)} b_{31}^{(i)} - b_{12}^{(i)} b_{21}^{(i)} b_{33}^{(i)} - b_{11}^{(i)} b_{23}^{(i)} b_{32}^{(i)}. \end{aligned}$$

Für  $i = 1$  ist

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 3 & X+2 & -3 \\ 2 & 5 & X-5 \end{pmatrix}.$$

Die angegebenen Produkte in der sarrusschen Regel sind

$$\begin{aligned} b_{11}^{(1)} b_{22}^{(1)} b_{33}^{(1)} &= X^3 - X^2 - 16X - 20, \quad b_{12}^{(1)} b_{23}^{(1)} b_{31}^{(1)} = 0, \quad b_{13}^{(1)} b_{21}^{(1)} b_{32}^{(1)} = -15, \\ b_{13}^{(1)} b_{22}^{(1)} b_{31}^{(1)} &= -2X - 4, \quad b_{12}^{(1)} b_{21}^{(1)} b_{33}^{(1)} = 0, \quad b_{11}^{(1)} b_{23}^{(1)} b_{32}^{(1)} = -15X - 30. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\chi_{A^{(1)}} = X^3 - X^2 + X - 1.$$

Analog ergeben sich

<sup>1</sup> Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\chi_{A^{(2)}} = X^3 + 2X^2 - X - 2,$$

$$\chi_{A^{(3)}} = X^3 - 3X^2 + 3X - 1.$$

Nach dem Hinweis zur Aufgabe müssen die charakteristischen Polynome durch  $X - 1$  teilbar sein, daher sind nur noch die Nullstellen der quadratischen Polynome  $\psi_{A^{(i)}} = \chi_{A^{(i)}} / (X - 1)$  zu untersuchen. Die Division ergibt

$$\psi_{A^{(1)}} = X^2 + 1,$$

$$\psi_{A^{(2)}} = X^2 + 3X + 2,$$

$$\psi_{A^{(3)}} = X^2 - 2X + 1.$$

Das Polynom  $\psi_{A^{(1)}}$  besitzt keine reellen Nullstellen, das Polynom  $\psi_{A^{(2)}}$  zwei verschiedene reelle Nullstellen ungleich 1 und das Polynom  $\psi_{A^{(3)}}$  eine Doppelnullstelle mit dem Wert 1. Die Frage nach der Diagonalisierbarkeit lässt sich nun beantworten:

Nur die Matrix  $A^{(2)}$  ist diagonalisierbar.

**Begründung.** Alle Eigenwerte der Matrix  $A^{(2)}$  sind reell und haben die algebraische Vielfachheit 1.

Die übrigen können folgendermaßen ausgeschlossen werden: Aus der Diagonalisierbarkeit folgt, dass das charakteristische Polynom über  $\mathbb{R}$  in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt – dies ist nicht der Fall, wenn ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen auftritt. Ist eine Matrix mit einem einzigen Eigenwert diagonalisierbar, so ist sie bereits selbst eine Diagonalmatrix – dies ist jedoch hier nicht der Fall.