Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹
Lineare Algebra individuell

◁ zur [Fundstelle](#)

Aufgabe 5/2/025

(S: Varianten)

Diagonalisierbarkeit in der Dimension 3 (2)

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 [Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus](#)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen $A^{(i)}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 4 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Jede der Matrizen hat die Zahl 1 als Eigenwert.

Lösung. Um eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen, werden zunächst ihre Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt.

In unserem Falle sind zunächst die beiden charakteristischen Polynome $\chi_{A^{(i)}}$ aus $\mathbb{R}[X]$ mit $i = 1, 2$ zu berechnen, d.h. die Determinanten der charakteristischen Matrizen $B^{(i)} = X \cdot E_3 - A^{(i)}$. Es gilt

$$\chi_{A^{(i)}} = \det(B^{(i)}).$$

Die leibnizsche Formel (vgl. 4/2/6) führt im Falle der Dimension 3 auf die sarrussche Regel

$$\begin{aligned} \chi_{A^{(i)}} &= b_{11}^{(i)} b_{22}^{(i)} b_{33}^{(i)} + b_{12}^{(i)} b_{23}^{(i)} b_{31}^{(i)} + b_{13}^{(i)} b_{21}^{(i)} b_{32}^{(i)} \\ &\quad - b_{13}^{(i)} b_{22}^{(i)} b_{31}^{(i)} - b_{12}^{(i)} b_{21}^{(i)} b_{33}^{(i)} - b_{11}^{(i)} b_{23}^{(i)} b_{32}^{(i)}. \end{aligned}$$

Für $i = 1$ ist

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} X + 2 & 3 & -4 \\ 0 & X + 5 & -4 \\ 3 & 3 & X - 5 \end{pmatrix}.$$

Die angegebenen Produkte in der sarrusschen Regel sind

$$\begin{aligned} b_{11}^{(1)} b_{22}^{(1)} b_{33}^{(1)} &= X^3 + 2X^2 - 25X - 50, & b_{12}^{(1)} b_{23}^{(1)} b_{31}^{(1)} &= -36, & b_{13}^{(1)} b_{21}^{(1)} b_{32}^{(1)} &= 0, \\ b_{13}^{(1)} b_{22}^{(1)} b_{31}^{(1)} &= -12X - 60, & b_{12}^{(1)} b_{21}^{(1)} b_{33}^{(1)} &= 0, & b_{11}^{(1)} b_{23}^{(1)} b_{32}^{(1)} &= -12X - 24. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\chi_{A^{(1)}} = X^3 + 2X^2 - X - 2.$$

Analog ergibt sich

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\chi_{A^{(2)}} = X^3 - 3X^2 + 3X - 1.$$

Nach dem Hinweis zur Aufgabe müssen die charakteristischen Polynome durch $X - 1$ teilbar sein, daher sind nur noch die Nullstellen der quadratischen Polynome $\psi_{A^{(i)}} = \chi_{A^{(i)}} / (X - 1)$ zu untersuchen. Die Division ergibt

$$\psi_{A^{(1)}} = X^2 + 3X + 2,$$

$$\psi_{A^{(2)}} = X^2 - 2X + 1.$$

Das Polynom $\psi_{A^{(1)}}$ besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen ungleich 1 und das Polynom $\psi_{A^{(2)}}$ besitzt eine Doppelnulstelle mit dem Wert 1. Die Frage nach der Diagonalisierbarkeit lässt sich nun beantworten:

Nur die Matrix $A^{(1)}$ ist diagonalisierbar.

Begründung. Alle Eigenwerte der Matrix $A^{(1)}$ sind reell und haben die algebraische Vielfachheit 1.

Die andere Matrix kann folgendermaßen ausgeschlossen werden: Ist eine Matrix mit einem einzigen Eigenwert diagonalisierbar, so ist sie bereits selbst eine Diagonalmatrix – dies ist jedoch hier nicht der Fall.