

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◀ zur Fundstelle

Aufgabe 5/4/126

(S: Varianten)

Minimalpolynom (2)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & -3 & -3 & 3 \\ 6 & 7 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom m_A von A , indem Sie untersuchen, ob kleine Potenzen der Matrix linear abhängig sind.
- (2) Ist A halbeinfach?

Lösung. Offensichtlich ist m_A nicht linear (A ist keine Diagonalmatrix).

Nun testen wir, ob m_A quadratisch ist; dann muss A^2 plus ein (geeignetes) Vielfaches $u \cdot A$ von A diagonal sein. $A^2 + u \cdot A = v \cdot E_4$ entspricht einem einfach auszuwertenden System linearer Gleichungen für u und v ; wir schreiben einzelne davon auf und testen durch Einsetzen, ob die Bedingung erfüllt ist. Leicht zeigt sich, dass dies für $u = -2$ der Fall ist, dann ist weiter $v = -6$.

Wir haben so ein nichtkonstantes Polynom $f = X^2 - 2X + 6 \in \mathbb{R}[X]$ minimalen Grades mit $f(A) = 0$ gefunden. Da f normiert ist, folgt $f = m_A$; dies ist die Antwort auf Frage (1).

Leicht ist zu sehen, dass m_A keine mehrfache Nullstelle in \mathbb{C} besitzt, daher ist A eine halbeinfache Matrix.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.