Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 5/4/140 (S: Varianten)
Smithsche Normalform

Index: smithsche Normalform, Präsentationsmatrix einer Matrix, Determinantenteiler einer Matrix, Elementarteiler einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/14 - 5/4/24 Elementarteiler

Bestimmen Sie die Normalform einer Präsentationsmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_2).$$

Lösung. Die charakteristische Matrix ist

$$X \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} X & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & X+1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, \mathbb{F}_2[X]).$$

Nach Vertauschen der ersten beiden Zeilen entsteht eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & X+1 \end{pmatrix},$$

die an der Position $(1, 1)$ einen von 0 verschiedenen Eintrag minimalen Grades besitzt. Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Zeile von den übrigen ergibt sich daraus eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \\ 0 & X+1 & X \end{pmatrix},$$

deren erste Spalte bereits die gewünschte Gestalt hat. Sie ist offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \\ 0 & X+1 & X \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{e}_1(A) = 1$ muss die Teilmatrix

$$C = \begin{pmatrix} X^2+1 & X+1 \\ X+1 & X \end{pmatrix} \quad \text{zur Matrix} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}_2(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{e}_3(A) \end{pmatrix}$$

äquivalent sein. Anstatt den obigen Algorithmus fortzusetzen, lassen sich in diesem besonders einfachen Fall auch die größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{d}_3(A)$ und $\mathrm{d}_2(A)$ der äußeren

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

Potenzen $\Lambda^i(C)$ $(\, i = 2, 1\,)$ schnell bestimmen: Dies sind im ersten Fall die Determinante und im zweiten der ggT aller Einträge von C. So ergeben sich

$$\mathrm{e}_3(A) = \frac{\mathrm{d}_3(A)}{\mathrm{d}_2(A)} = \; X^3 + X^2 + X + 1\,, \quad \mathrm{e}_2(A) = \mathrm{d}_2(A) = \; 1$$

und damit die gesuchte Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X^3 + X^2 + X + 1 \end{pmatrix}$$

der Präsentationsmatrix für A.