

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◀ zur Fundstelle

Aufgabe 5/4/141

(S: Varianten)

Smithsche Normalform, Charakteristik 0, Dimension 4

Index: smithsche Normalform, Präsentationsmatrix einer Matrix, Determinantenteiler einer Matrix, Elementarteiler einer Matrix, charakteristische Matrix, Äquivalenz polynomialer Matrizen

Stoffeinheiten: 5/4/14 - 5/4/24 Elementarteiler

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(4, \mathbb{Q}).$$

Bestimmen Sie für die Präsentationsmatrix $\text{Char}_A := X \cdot E_4 - A$ von A die smithsche Normalform, d.h. eine äquivalente polynomiale Matrix $\text{diag}(f_1, \dots, f_4)$ mit normierten Polynomen $f_i \in \mathbb{Q}[X]$, die der Teilbarkeitsbedingung $f_1 | f_2 | f_3 | f_4$ genügen.

Lösung. Die gesuchte Matrix ist zur Matrix

$$\text{Char}_A = \begin{pmatrix} X+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & X+1 \end{pmatrix}$$

äquivalent, sie kann daher durch Aufeinanderfolge von Umformungen der folgenden drei Typen gewonnen werden:

- (1) Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten),
- (2) Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) mit einer Zahl aus $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$,
- (3) Addition des p -fachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen, wobei $p \in \mathbb{Q}[X]$.

Im Algorithmus zur Berechnung der smithschen Normalform werden die Diagonalelemente schrittweise berechnet. Dabei entstehen die Matrizen

$M^{(i)} \in M(5-i, \mathbb{Q}[X])$ mit der Ausgangsmatrix $M^{(1)} := \text{Char}_A$ und mit

$$M^{(i)} \text{ äquivalent } \begin{pmatrix} f_i & 0 \\ 0 & M^{(i+1)} \end{pmatrix}$$

für $i = 1, 2, 3$. Außerdem teilen die Polynome f_i alle Einträge von $M^{(i+1)}$. Das Polynom f_4 ergibt sich aus $\chi_A = \det(\text{Char}_A)$:

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$f_4 = \det(\text{Char}_A)/(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3).$$

Die oben skizzierten Hauptschritte des Algorithmus können recht komplex sein, doch solange in den Matrizen $M^{(i)}$ Einträge existieren, die auch in $\mathbb{Q}$ liegen, bleibt das Verfahren einfach (ein solches Element teilt alle übrigen). Wir wissen hier bereits $f_i = 1$.

Durch Vertauschen von Zeilen (bzw. Spalten) wird ein Element aus $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ in die Position $(1, 1)$ der Matrix $M^{(i)}$ gebracht. Dann werden durch die üblichen Eliminationsschritte mittels (1), (2), (3) die von 0 verschiedenen Elemente der ersten Spalte und der ersten Zeile zu Null reduziert. So gewinnen wir $M^{(i+1)}$.

Wenn wir in $M^{(1)}$ die erste Zeile mit der zweiten Zeile vertauschen, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & X-1 & 0 & 0 \\ X+1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Die Elimination der ersten Spalte liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & X-1 & 0 & 0 \\ 0 & -X^2+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Bei Elimination der ersten Zeile mittels der ersten Spalte werden die Elemente unter der ersten Zeile nicht verändert. Damit ist $M^{(2)}$ bereits hier ablesbar, nämlich

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} -X^2+2 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Auch in dieser Matrix gibt es noch Elemente, die in $\mathbb{Q}$ liegen, z.B. das Element $m_{23}^{(2)}$. Wir vertauschen so, dass dieses Element in die Position $(1, 1)$ der Matrix gerät, und gewinnen (evtl. nach Multiplikation der ersten Zeile mit einer geeigneten Konstanten $\neq 0$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -X+1 & 0 \\ 0 & 0 & -X^2+2 \\ X+1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Elimination der ersten Spalte ergibt

$$\begin{pmatrix} 1-X+1 & 0 \\ 0 & 0 & -X^2+2 \\ 0 & X^2-2 & 0 \end{pmatrix},$$

und wir finden analog zum ersten Schritt

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -X^2+2 \\ X^2-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun liegt kein Element dieser Matrix in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Wir verzichten hier auf eine Darstellung weiterer Einzelheiten des Verfahrens (vgl. auch 5/4/24). Das Resultat kann jetzt durch einen Kunstgriff gewonnen werden:

Mit $q := X^2 - 2$ gilt

$$M^{(3)} = q \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher teilt q das Polynom f_3 (und damit auch f_4) sowie q^2 das Polynom $\chi_A = \det(\text{Char}_A)$. Wegen $\deg(q^2) = \deg(\chi_A) = 4$ folgt $q = f_3 = f_4$. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^2 - 2 \end{pmatrix}$$

als smithsche Normalform der gegebenen Matrix Char_A .