Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 5/5/006 (S: Varianten)
Jordanzerlegung (4)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, Jordanzerlegung einer Matrix, nilpotente Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen

Bestimmen Sie die Jordanzerlegung der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 2 & 7 \\ -7 & -4 & -4 & -3 \\ -10 & -6 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Das charakteristische Polynom ist ein Quadrat.

Lösung. Den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{R}^4$ bezeichnen wir mit φ.
Zunächst wird A (über den komplexen Zahlen, falls erforderlich) durch eine Ähnlichkeitstransformation in die jordansche Normalform überführt. Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \det(X \cdot E_4 - A) = X^4 - 8X^2 + 16 = (X^2 - 4)^2$$

und erhalten die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 2$ der Matrix A, die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 2 & 7 \\ -7 & -4 & -2 & -3 \\ -10 & -6 & -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, -3, 1)$$

erzeugt, d.h. $\boldsymbol{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1. Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\boldsymbol{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id})^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$ zusammen mit $\boldsymbol{v}_2$ eine Kette $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden

$$\boldsymbol{v}_1 = (11, -3, -31, 0)$$

als Lösung von

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 2 & 7 \\ -7 & -4 & -2 & -3 \\ -10 & -6 & -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$\boldsymbol{v}_3 = (-13, 21, 1, 0)$

$\boldsymbol{v}_4 = (-3, 3, 1, 1)$

für $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4 = 0$ ($\boldsymbol{v}_4 \neq \mathbf{0}$) und $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_3 = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -13 & -3 \\ -3 & -1 & 21 & 3 \\ -31 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir die jordansche Normalform $U^{-1} \cdot A \cdot U = G + F$ der Matrix A mit

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ist G eine Diagonalmatrix, F nilpotent, sowie $F \cdot G = G \cdot F$.
Mit der diagonalisierbaren Matrix $B = U \cdot G \cdot U^{-1}$ und der nilpotenten Matrix $N = U \cdot F \cdot U^{-1}$ erhalten wir die Jordanzerlegung von A, d.h. $A = B + N$, wobei $B \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ halbeinfach, $N \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ nilpotent, $B \cdot N = N \cdot B$ ist und

$$B = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 45 & 17 & 20 & 16 \\ 51 & 47 & 12 & 48 \\ -67 & -39 & -36 & -32 \\ -81 & -49 & -24 & -56 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -13 & -9 & -4 & -8 \\ 13 & 9 & 4 & 8 \\ 11 & 7 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$