Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◃ zur Fundstelle

Aufgabe 5/5/007 (S: Varianten)
Jordanzerlegung (5)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, Jordanzerlegung einer Matrix, nilpotente Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen

Bestimmen Sie die Jordanzerlegung der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -10 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Das charakteristische Polynom ist ein Quadrat.

Lösung. Den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{C}^4$ bezeichnen wir mit φ.
Zunächst wird A (über den komplexen Zahlen) durch eine Ähnlichkeitstransformation in die jordansche Normalform überführt. Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_4 - A) = X^4 - 4X^3 + 14X^2 - 20X + 25 = (X^2 - 2X + 5)^2$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 1+2i$ und $\lambda_2 = 1-2i$ der Matrix A, die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -(2i-2) & 1 & 0 & 1 \\ -10 & -(2i+3) & -1 & -4 \\ 4 & 0 & -2i & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -(2i-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\boldsymbol{v}_2 = (2i, -(4i+4), 4, 0)$$

erzeugt, d.h. $\boldsymbol{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1. Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\boldsymbol{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id})^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$ zusammen mit $\boldsymbol{v}_2$ eine Kette $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden

$$\boldsymbol{v}_1 = (7, (16i - 22), 0, 8)$$

als Lösung von

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\begin{pmatrix} -(2i-2) & 1 & 0 & 1 \\ -10 & -(2i+3) & -1 & -4 \\ 4 & 0 & -2i & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -(2i-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -(4i+4) \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = (7, -(16i+22), 0, 8)$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (-2i, (4i-4), 4, 0)$$

für $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4 = 0$ ($\boldsymbol{v}_4 \neq \boldsymbol{0}$) und $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_3 = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 7 & 2i & 7 & -2i \\ (16i-22) & -(4i+4) & -(16i+22) & (4i-4) \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir die komplexe jordansche Normalform $U^{-1} \cdot A \cdot U = G + F$ der Matrix A mit

$$G = \begin{pmatrix} (2i+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2i+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(2i-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(2i-1) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist G eine halbeinfache Matrix, F nilpotent, sowie $F \cdot G = G \cdot F$. Mit der halbeinfachen Matrix $B = U \cdot G \cdot U^{-1}$ und der nilpotenten Matrix $N = U \cdot F \cdot U^{-1}$ erhalten wir die (reelle!) Jordanzerlegung von A, d.h. $A = B + N$, wobei $B \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ halbeinfach, $N \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ nilpotent, $B \cdot N = N \cdot B$ ist und

$$B = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 22 & 7 & -1 & 7 \\ -76 & -14 & -6 & -26 \\ 32 & 0 & 8 & -28 \\ 16 & 8 & 8 & 16 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$