

Marko Roczen und Helmut Wolter  
unter Mitarbeit von  
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

## Aufgabensammlung<sup>1</sup>

### Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

#### Aufgabe 5/5/008

(S: Varianten)

Jordanzerlegung (6)

**Index:** Minimalpolynom einer Matrix, Jordanzerlegung einer Matrix, nilpotente Matrix, halbeinfache Matrix

**Stoffeinheiten:** 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen

Bestimmen Sie die Jordanzerlegung der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 22 & 14 & -8 \\ -8 & -18 & -12 & 10 \\ -8 & 0 & 6 & -8 \\ -16 & -16 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Lösung.** Den (bezüglich der Standardbasis) zu  $A$  gehörigen Endomorphismus des Standardraumes  $\mathbb{C}^4$  bezeichnen wir mit  $\varphi$ .

Zunächst wird  $A$  (über den komplexen Zahlen) durch eine Ähnlichkeitstransformation in die Jordansche Normalform überführt. Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi_A = \det(X \cdot E_4 - A) = X^4 + 72X^2 + 1296$  und erhalten die Eigenwerte  $\lambda_1 = 6i$  und  $\lambda_2 = -6i$  der Matrix  $A$ , die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes  $H_1 := H(\varphi, \lambda_1)$  lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -(6i - 10) & 22 & 14 & -8 \\ -8 & -(6i + 18) & -12 & 10 \\ -8 & 0 & -(6i - 6) & -8 \\ -16 & -16 & -2 & -(6i - 2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum  $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id}) \subseteq H_1$  beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\mathbf{v}_2 = (2, -(2i + 2), (4i + 4), 4)$$

erzeugt, d.h.  $\mathbf{v}_2$  ist ein Eigenvektor von  $A$  bezüglich  $\lambda_1$ . Nun muss wegen  $\dim(H_1) = 2$  jeder Urbildvektor  $\mathbf{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id})^{-1}(\mathbf{v}_2)$  zusammen mit  $\mathbf{v}_2$  eine Kette  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  zyklischer Vektoren für  $H_1$  bilden (Beweis?). Wir finden

$$\mathbf{v}_1 = ((i - 2), -(i - 2), -2, 0)$$

als Lösung von

<sup>1</sup> Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\begin{pmatrix} -(6i-10) & 22 & 14 & -8 \\ -8 & -(6i+18) & -12 & 10 \\ -8 & 0 & -(6i-6) & -8 \\ -16 & -16 & -2 & -(6i-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -(2i+2) \\ (4i+4) \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\mathbf{v}_3 = (-(i+2), (i+2), -2, 0)$$

$$\mathbf{v}_4 = (2, (2i-2), -(4i-4), 4)$$

für  $H(\varphi, \lambda_2)$  als Lösungen der Gleichungssysteme  $(A - \lambda_2 \cdot E_4) \cdot {}^t\mathbf{v}_4 = 0$  ( $\mathbf{v}_4 \neq \mathbf{0}$ ) und  $(A - \lambda_2 \cdot E_4) \cdot {}^t\mathbf{v}_3 = {}^t\mathbf{v}_4$ . Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} (i-2) & 2 & -(i+2) & 2 \\ -(i-2) & -(2i+2) & (i+2) & (2i-2) \\ -2 & (4i+4) & -2 & -(4i-4) \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  und  $\mathbf{v}_4$  gebildet werden, erhalten wir die komplexe jordanische Normalform  $U^{-1} \cdot A \cdot U = G + F$  der Matrix  $A$  mit

$$G = \begin{pmatrix} 6i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6i \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist  $G$  eine halbeinfache Matrix,  $F$  nilpotent, sowie  $F \cdot G = G \cdot F$ . Mit der halbeinfachen Matrix  $B = U \cdot G \cdot U^{-1}$  und der nilpotenten Matrix  $N = U \cdot F \cdot U^{-1}$  erhalten wir die (reelle!) Jordanzerlegung von  $A$ , d.h.  $A = B + N$ , wobei  $B \in M(4; \mathbb{R})$  halbeinfach,  $N \in M(4; \mathbb{R})$  nilpotent,  $B \cdot N = N \cdot B$  ist und

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 15 & -9 \\ -12 & -24 & -15 & 12 \\ 0 & 12 & 12 & -12 \\ -12 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & -2 \\ -8 & -12 & -6 & 4 \\ -4 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$