

Marko Roczen und Helmut Wolter  
unter Mitarbeit von  
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

## Aufgabensammlung<sup>1</sup>

### Lineare Algebra individuell

◀ zur Fundstelle

#### Aufgabe 5/5/015

(S: Varianten)

Natürliche Form über  $\mathbb{F}_5$  (3)

**Index:** Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

**Stoffeinheiten:** 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix  $A \in M(4; \mathbb{F}_5)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung.** Wir berechnen zunächst die Elementarteiler  $e_1(A), \dots, e_4(A)$  aus  $\mathbb{F}_5[X]$ . Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X+2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & X+2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & X+2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & X-1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^4 - 2X^2 - X \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für  $A$ . Es gibt daher einen einzigen von 1 verschiedenen Elementarteiler  $e_4(A) = X^4 - 2X^2 - X$ , dessen Begleitmatrix  $B = B(e_4(A))$  in diesem Fall die natürliche Form der Matrix  $A$  ist,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.