

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 5/5/022

(S: Varianten)

Natürliche Form über \mathbb{Q} (2)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in M(4; \mathbb{Q})$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $e_1(A), \dots, e_4(A)$ aus $\mathbb{Q}[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X+1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & X & 1 & -1 \\ 3 & -2 & X+3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & X \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 + 2X + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^2 + 2X + 2 \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A . Es gibt daher zwei von 1 verschiedene Elementarteiler $e_3(A) = e_4(A) = X^2 + 2X + 2$. Die aus den beiden Begleitmatrizen gebildete Blockdiagonalmatrix B ist die natürliche Form der Matrix A ,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.