Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 5/5/032 (S: Varianten)
Natürliche Form über $\mathbb{F}_2$ (2)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4, \mathbb{F}_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \ldots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{F}_2[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & X & 1 \\ 1 & 0 & 0 & X+1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^4+X^3+X^2+X \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher einen einzigen von 1 verschiedenen Elementarteiler $\mathrm{e}_4(A) = X^4+X^3+X^2+X$, dessen Begleitmatrix $B = \mathrm{B}(\mathrm{e}_4(A))$ in diesem Fall die natürliche Form der Matrix A ist,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.