

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur [Fundstelle](#)

Aufgabe 5/5/035

(S: Varianten)

Natürliche Form über \mathbb{F}_2 (3)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 [Natürliche Form](#), [rationale und klassische Normalform](#)

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in M(4; \mathbb{F}_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $e_1(A), \dots, e_4(A)$ aus $\mathbb{F}_2[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X & 1 & 1 & 0 \\ 0 & X + 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & X & 1 \\ 0 & 1 & 1 & X + 1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^4 + X + 1 \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A . Es gibt daher einen einzigen von 1 verschiedenen Elementarteiler $e_4(A) = X^4 + X + 1$, dessen Begleitmatrix $B = B(e_4(A))$ in diesem Fall die natürliche Form der Matrix A ist,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.