Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 5/5/045 (S: Varianten)
Erste, zweite und dritte Normalform einer Matrix (2)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix, Hyperbegleitmatrix, klassische Normalform, primäre Elementarteiler, rationale Normalform einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Normalform einer Matrix mit den nichttrivialen Elementarteilern

$$\mathrm{e}_7 = X+3,$$
$$\mathrm{e}_8 = X^3+9X^2+31X+39,$$
$$\mathrm{e}_9 = X^5+15X^4+98X^3+342X^2+637X+507$$

aus $K[X]$ in jedem der Fälle $K=\mathbb{R}$ und $K=\mathbb{C}$.

Lösung. Die natürliche Form (erste Normalform) ist die aus den Begleitmatrizen $\mathrm{B}(\mathrm{e}_9)$, $\mathrm{B}(\mathrm{e}_8)$ und $\mathrm{B}(\mathrm{e}_7)$ der nichttrivialen Elementarteiler gebildete Blockmatrix, daher in beiden Fällen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -15 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -98 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -342 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -637 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -507 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(9;K).$$

Zur Bestimmung der primären Elementarteiler ist über $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$ die Zerlegung der Elementarteiler in irreduzible Faktoren auszuführen. Dies wird durch die Teilbarkeitseigenschaft $\mathrm{e}_7 \,|\, \mathrm{e}_8 \,|\, \mathrm{e}_9$ erleichtert. Division von e_8 durch $p := \mathrm{e}_7 = X+3$ ergibt $q := X^2+6X+13$, und Division von e_9 durch $\mathrm{e}_8 = p\cdot q$ ergibt q, d.h. $\mathrm{e}_9 = p\cdot q^2$.

p ist linear und q hat zwei verschiedene konjugiert komplexe Nullstellen, daher sind p und q über $\mathbb{R}$ irreduzibel. Wir erhalten als primäre Elementarteiler (p,p,p,q^2,q) mit $q^2 = X^4+12X^3+62X^2+156X+169$. Die aus den Begleitmatrizen dieser Polynome gebildete Blockdiagonalmatrix ist die zweite Normalform (rationale kanonische Form)

---

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 1&0&0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -62 & 0&1&0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -156 & 0&0&1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -169 & 0&0&0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0&0&0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0&0&0 & -13 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$. Im Fall $K = \mathbb{C}$ zerfällt q dagegen in zwei irreduzible Faktoren $q_1 = X + (2i+3)$, $q_2 = X - (2i-3)$, so dass hier die primären Elementarteiler durch $(p, p, p, q_1^2, q_1, q_2^2, q_2)$, $q_1^2 = X^2 + (4i+6)X + (12i+5)$, $q_2^2 = X^2 - (4i-6)X - (12i-5)$ gegeben sind. Als zweite Normalform entsteht über den komplexen Zahlen daher die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(4i+6) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(12i+5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(2i+3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4i-6) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (12i-5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2i-3) \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der dritten Normalform (der klassischen Form) ist im Fall $K = \mathbb{R}$ der Block $\mathrm{B}(q^2)$ in der zweiten Normalform durch die Hyperbegleitmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B}(q) & 0 \\ M & \mathrm{B}(q) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zu ersetzen. So entsteht die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $K = \mathbb{C}$ erhalten wir als klassische Form die jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(2i+3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(2i+3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(2i+3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2i-3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (2i-3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2i-3) \end{pmatrix}.$$