Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/1/050 (S: Varianten)
Parallelität, Unterräume in Parameterform (Charakteristik 2)

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Parameterdarstellung eines affinen Unterraumes, parallele Unterräume

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Im affinen Standardraum $\mathbb{F}_2^5$ sind die Unterräume

$$Y := P + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{y}_2 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{y}_3\,,$$
$$Z := Q + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{z}_1 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{z}_2 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{z}_3$$

durch

$$P = (0,1,1,1,0),\quad Q = (0,0,0,1,1)\,,$$
$$\boldsymbol{y}_1 = (1,1,0,1,1),\quad \boldsymbol{y}_2 = (1,0,1,0,1),\quad \boldsymbol{y}_3 = (0,1,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{z}_1 = (0,1,1,1,0),\quad \boldsymbol{z}_2 = (1,1,1,0,1),\quad \boldsymbol{z}_3 = (0,0,1,1,0)$$

gegeben. Stellen Sie fest, ob Y und Z parallel sind.

Lösung. Der Translationsraum $\mathrm{T}(Y)$ ist von den Vektoren $\boldsymbol{y}_i$ erzeugt, entsprechend der Translationsraum $\mathrm{T}(Z)$ von den Vektoren $\boldsymbol{z}_j$ $(1 \le i,j \le 3.)$
Werden $\boldsymbol{y}_i$ als Spalten einer Matrix $A \in \mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ und $\boldsymbol{z}_j$ als Spalten einer Matrix $B \in \mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ gewählt, so ist offenbar Y genau dann zu Z parallel, wenn $\mathrm{rang}(A,B) = \mathrm{rang}(A)$ oder $\mathrm{rang}(A,B) = \mathrm{rang}(B)$ ist. Um dies zu prüfen, wird die Matrix

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&1&1&1\\ 1&0&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

durch den gaußschen Algorithmus umgeformt. Wir erhalten eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

So folgt $\mathrm{rang}(A) = 3$ und $\mathrm{rang}(A,B) = 3$, daher $Y \,||\, Z$.

---

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.