

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/1/060

(S: Varianten)

Parallelität, Unterräume in Parameterform (Charakteristik 0)

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Parameterdarstellung eines affinen Unterraumes, parallele Unterräume

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Im affinen Standardraum $\mathbb{R}^5$ sind die Unterräume

$$Y := P_0 + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{P_0 P_1} + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{P_0 P_2} + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{P_0 P_3},$$

$$Z := Q_0 + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{Q_0 Q_1} + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{Q_0 Q_2}$$

durch die folgenden Punkte

$$P_0 = (-3, -2, 1, -2, -3), \quad P_1 = (-10, -4, -2, 5, -2),$$

$$P_2 = (-4, -2, 0, -7, -6), \quad P_3 = (-2, -1, 0, -4, -4),$$

$$Q_0 = (-1, 5, -2, 0, 3), \quad Q_1 = (-1, 6, -4, -7, -1),$$

$$Q_2 = (-8, 4, -7, 0, 0)$$

gegeben. Stellen Sie fest, ob Y und Z parallel sind.

Lösung. Der Translationsraum $T(Y)$ wird von den Vektoren $\mathbf{y}_i := \overrightarrow{P_0 P_i}$ erzeugt, entsprechend der Translationsraum $T(Z)$ von den Vektoren $\mathbf{z}_j := \overrightarrow{Q_0 Q_j}$ ($1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2$):

$$\mathbf{y}_1 = (-7, -2, -3, 7, 1), \quad \mathbf{y}_2 = (-1, 0, -1, -5, -3)$$

$$\mathbf{y}_3 = (1, 1, -1, -2, -1),$$

$$\mathbf{z}_1 = (0, 1, -2, -7, -4), \quad \mathbf{z}_2 = (-7, -1, -5, 0, -3)$$

Werden die Vektoren $\mathbf{y}_i$ als Spalten einer Matrix $A \in M(5, 3; \mathbb{R})$ und die Vektoren $\mathbf{z}_j$ als Spalten einer Matrix $B \in M(5, 2; \mathbb{R})$ gewählt, so ist offenbar Y genau dann zu Z parallel, wenn $\text{rang}(A, B) = \text{rang}(A)$ oder $\text{rang}(A, B) = \text{rang}(B)$ ist. Um dies zu prüfen, wird die Matrix

$$(A, B) = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 1 & 0 & -7 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 7 & -5 & -2 & -7 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

durch den gaußschen Algorithmus umgeformt. Es ergibt sich eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

So folgt $\text{rang}(A) = 3$ und $\text{rang}(A, B) = 3$, daher $Y \parallel Z$.