Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/1/320 (S: Varianten)
Affine Koordinaten (Charakteristik 0)

Index: affiner Raum, affine Basis, affine Koordinaten

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Im affinen Standardraum $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte

$$P_0 = (-5,-4,3)\,, \quad P_1 = (-8,-7,4)$$
$$P_2 = (-7,-6,2)\,, \quad P_3 = (-3,-1,2)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (P_0, P_1, P_2, P_3) eine affine Basis ist und bestimmen Sie die affinen Koordinaten von $Q = (-1,4,2)$ bezüglich dieser Basis.

Lösung. Zunächst ist zu zeigen, dass im Translationsvektorraum $\mathrm{T}(\mathbb{R}^3)$ die Vektoren

$$\boldsymbol{b}_1 := \overrightarrow{P_0P_1} = (-3,-3,1)\,,$$
$$\boldsymbol{b}_2 := \overrightarrow{P_0P_2} = (-2,-2,-1)\,,$$
$$\boldsymbol{b}_3 := \overrightarrow{P_0P_3} = (2,3,-1)$$

eine Basis bilden. Die affinen Koordinaten $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ von Q sind dann durch die Bedingung $x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 = \overrightarrow{P_0Q}$ eindeutig bestimmt. Mit

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3,4,\mathbb{R})$$

bezeichnen wir die Matrix, deren erste drei Spalten durch die Tupel $\boldsymbol{b}_i$ gebildet werden und deren letzte durch $\overrightarrow{P_0Q}$ gegeben ist. Mit zeilenäquivalenten Umformungen wird B in

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

überführt; daraus ist zu entnehmen, dass die ersten drei Spalten, daher auch $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ linear unabhängig sind; diese Vektoren bilden aus Dimensionsgründen eine Basis des Translationsraumes. Die Matrix B ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems, das gesuchte Koordinatentupel seine eindeutig bestimmte Lösung; sie lässt sich aus C leicht ablesen. Wir erhalten $(x_1,x_2,x_3) = (2,-1,4)$.

---

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.