

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◀ zur Fundstelle

Aufgabe 6/2/050

(S: Varianten)

Winkel zwischen Geraden

Index: euklidischer affiner Standardraum, Winkel zwischen zwei Vektoren, Skalarprodukt, Norm eines Vektors

Stoffeinheiten: 6/2/15 - 6/2/16 Euklidische affine Räume

Zeigen Sie, dass sich die Geraden

$$G_1 = (3, -3, -3) \vee (5, -1, -3),$$

$$G_2 = (5, -5, 1) \vee (5, -7, 3)$$

im euklidischen affinen Standardraum $\mathbb{R}^3$ schneiden und bestimmen Sie den Schnittwinkel. (Der Schnittwinkel ist derjenige Winkel im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$, der durch zwei geeignete, von $\mathbf{0}$ verschiedene Vektoren der Translationsräume gebildet wird.)

Lösung. Die Bedingung $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ ist offensichtlich äquivalent dazu, dass das lineare Gleichungssystem

$$(3, -3, -3) + s \cdot (2, 2, 0) = (5, -5, 1) + t \cdot (0, -2, 2)$$

eine Lösung $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Nun ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix dieses Systems, und leicht finden wir eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ist zu entnehmen, dass der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt, d.h. $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Die Verbindungsvektoren der gegebenen Punkte sind Erzeugende der entsprechenden Translationsräume. Wir erhalten $T(G_1) = \mathbb{R}\mathbf{v}$ und $T(G_2) = \mathbb{R}\mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{w} = (0, -2, 2)$. Für den Schnittwinkel α der Geraden G_1 und G_2 ergibt sich

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \cdot \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} = \frac{1}{4},$$

folglich

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$